ВНИИ СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

СБОРНИК ТРУДОВ

9

1978

Л. В. Канторович, В. И. Жиянов, А. Г. Хованский

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ОДНОПРОДУКТОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Предлагаемая работа посвящена применению однопродуктовых динамических моделей экономики для глобального анализа развития экономической системы, в частности для учета влияния технического прогресса на динамику таких важнейших экономических показателей, как национальный доход, объем производственных фондов, норма эффективности капиталовложений и др. К числу таких моделей относится однопродуктовая динамическая модель экономики, построенная в работе [1]. Производственные факторы — труд и капитал — в этой модели рассматриваются в максимально агрегированном виде. При наличии гипотезы о мгновенной превращаемости фондов, т. е. при допущении, что фонды всегда могут быть преобразованы из одной формы в другую и что благодаря этому можно, в частности, перейти от одной структуры производства (соотношение труда и фондов) к другой без потерь, развитие экономики (рост фондов) описывается в модели очень простым дифференциальным уравнением

$$\frac{dK(t)}{dt} = P(t) - V(t) = e^{\delta t} U[K(t), T(t)] - V[t, T(t), K(t), P(t)].$$

Здесь $K(t)$ — фонды (основные и оборотные) на момент времени t; $P(t)$ — выпуск чистой продукции или национальный доход; $V(t)$ — общее потребление в расчете на единицу времени.

Производственная функция $U[K, T]$ характеризует количество чистой продукции, которое можно произвести в расчете на единицу времени при наличии фондов в размере K и ресурсов труда T.

В модели принимается, что эффективность производства повышается с течением времени — присутствует нейтральный, по Хиксу, технический прогресс (множитель $e^{\delta t}$). Параметр δ характеризует темп технического прогресса. Такой учет технического прогресса предполагает, что эффективность фондов возрастает с течением времени в зависимости от момента использования оборудования. Примером такого прогресса служит совершенствование методов управления и организации производства.

Эта модель хорошо поддается аналитическому исследованию, в частности, на ее основе может быть определен такой важный параметр экономической системы, как норма эффективности капиталовложений

$n_э$. Для $n_э$ получено выражение

$$n_э(t)=\frac{\frac{1}{P(t)}\cdot\frac{dP(t)}{dt}-\frac{1}{T(t)}\cdot\frac{dT(t)}{dt}-\delta}{1-\frac{V(t)}{P(t)}-\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt}\cdot\frac{K(t)}{P(t)}}.$$

Все входящие в эту формулу величины имеют ясное экономическое содержание. Так, на основе данной модели может быть в какой-то мере оценено влияние технического прогресса на величину $n_э$ (как это сделано в работе [1]) и на другие характеристики экономической системы.

В литературе имеется ряд макроэкономических моделей, в которых предполагалось, что эффективность фондов данного поколения зависит от достигнутого уровня технического прогресса. Такие динамические модели экономики рассматривались несколькими авторами (работы Р. Солоу, Л. Юхансена, Л. В. Канторовича и др.) [2—6] и получили название «модели с воплощенным (овеществленным) техническим прогрессом». В подобных моделях фонды различаются по моментам создания, что в условиях научно-технического прогресса предусматривает различную эффективность этих фондов даже при одинаковой структуре (под структурой понимается органическое строение капитала).

В некоторых моделях с «воплощенным техническим прогрессом» по отношению к фондам данного поколения принимается гипотеза о мгновенной превращаемости их в любой последующий момент времени. К таким моделям относится известная модель Солоу [2, 5], в которой рабочая сила и капитал сохраняют возможность заменять друг друга независимо от цикла (момента) производства, в котором они участвуют. В других моделях [3, 4, 6] принимается, что структура фондов в момент их ввода выбирается определенным образом (на данный момент), например оптимально, и в дальнейшем не может изменяться. К этой группе моделей относится и рассматриваемая в настоящей статье динамическая модель экономики с дифференцированными фондами. Модели с гипотезой о свободной превращаемости фондов в западной литературе называются моделями типа «putty—putty», а модели с «застывшей» структурой фондов называются моделями типа «putty—clay».

В нашей модели в качестве критерия оптимальности развития экономики принят критерий дифференциальной оптимизации, согласно которому политика вывода морально устаревших фондов считается оптимальной, если она обеспечивает максимальный темп роста национального дохода. Математически такой критерий состоит в последовательной максимизации некоторого функционала на бесконечно малом интервале времени. Общая формулировка такого критерия дифференциальной оптимизации приведена в приложении. Система уравнений модели представляет собой систему дифференциальных уравнений с запаздыванием, в которой запаздывание не фиксировано, а определяется при анализе процесса. Уравнения системы достаточны, чтобы по состоянию экономической системы в настоящем определить ее дальнейшее развитие.

Для некоторых специальных случаев построенной модели найдены аналитические решения экспоненциального вида [7]. Такие решения представляют удобную модель для качественного анализа, позволяющую изучать зависимость различных экономических показателей от параметров, определяющих развитие экономики (параметр, характеризующий темпы научно-технического прогресса, норма накопления, темпы роста трудовых ресурсов). Аналитические выражения, полученные (на базе экспоненциальных решений) для таких макроэкономических показателей, как национальный доход, объем производственных фондов, фондовооруженность и др., позволяют изучать их сравнительную динамику.

В конце статьи сделана попытка определить (на основе построенной модели) экономическую оценку производственных фондов за весь период их использования, а также прокатные оценки единичных фондов и оценки эффективности единицы труда в данный момент времени. Повышение экономической оценки (эффективности) фондов с течением времени (под влиянием технического прогресса и улучшения их структуры) приводит к тому, что равные объемы продукции, созданной в сфере производства, имеют различную ценность. Это обстоятельство, на наш взгляд, требует введения корректирующего коэффициента для той доли национального дохода, которая идет на накопление, чтобы исключить возможную ее недооценку. Построенная модель экономики используется для изучения зависимости величины такого корректирующего коэффициента от экономических параметров и для изучения влияния технического прогресса на темп роста национального дохода.

1. Описание модели

В экономической системе, производящей один продукт (односекторная модель), выделяются два главных производственных фактора: 1) производственные фонды (овеществленный капитал), дифференцированные по моментам их создания и измеряемые (в ценностном выражении) в единицах продукта, и 2) трудовые ресурсы, измеряемые количеством трудовых единиц. Обозначим через $T(t)$ совокупные трудовые ресурсы системы в момент времени t. Эта функция в модели предполагается заданной (экзогенная переменная модель).

Предполагается также, что в любой момент t эффективность производства характеризуется производственной функцией $U(x, y, \tau)$, которая выражает количество чистого продукта, создаваемого трудом y в единицу времени при использовании производственных фондов (созданных в момент времени τ) объема x единиц продукта ($\tau<t$). Предполагается монотонное возрастание функции U по аргументу τ, что отражает большую эффективность более новых фондов под влиянием научно-технического прогресса. Такой учет технического прогресса в моделях получил название «овеществленный технический прогресс» [2—7]. Предполагается, что функция U положительно однородна по первым двум аргументам

$$U(\lambda x, \lambda y, \tau)=\lambda U(x, y, \tau)$$

при $\lambda>0$ и что функция U выпуклая по этим аргументам. Первое предположение отражает отсутствие эффекта масштаба производства, а второе — тот факт, что функция U базируется на оптимальных способах производства.

Капиталовложения, идущие на увеличение фондов и замену выбывающих фондов, задаются через интенсивность их ввода $\varkappa(t)$, т. е. предполагается, что объем фондов, введенных в производство в временном интервале $[t, t+dt]$ равен $\varkappa(t)dt$. Относительно функции $\varkappa(t)$ в различных модификациях модели делаются различные предположения: функция $\varkappa(t)$ либо предполагается экзогенной переменной модели, т. е. заданной априори, либо предполагается, что она составляет постоянную часть национального дохода (более общим образом можно предполагать, что функция $\varkappa(t)$ определяется предыдущим развитием экономики).

Количество трудовых ресурсов, занятых на вновь открывающихся фондах, определяется интенсивностью их ввода $\varphi(t)$, т. е. предполагается, что ресурсы, введенные в новые предприятия во временном интервале $[t, t+dt]$, равняются $\varphi(t)dt$ единиц. Эта функция в модели подлежит нахождению (эндогенная переменная модели).

Предполагается, что в процессе развития экономики трудовые ресурсы снимаются с устаревших неэкономичных фондов, которые выбывают из производства, и в дальнейшем не рассматриваются. А высвобождающиеся в результате этого процесса трудовые ресурсы используются на вновь создаваемых фондах.

В предположении непрерывного повышения производительности труда на вновь создаваемых фондах в каждый момент времени из производства будут выводиться фонды, имеющие наиболее давний момент создания (во всяком случае предполагается, что это условие всегда имеет место). Поэтому политика вывода фондов из производства в модели характеризуется функцией $m(t)$, выражающей время создания фондов, выводимых из производства в момент времени t. Функция $m(t)$ также является эндогенной переменной модели.

Количество чистого продукта, производимого на фондах, участвующих в производстве в момент времени t (в единицу времени), — национальный доход, — в модели подсчитывается по следующей формуле:

$$P(t)=\int_{m(t)}^{t} U[\varkappa(\tau), \varphi(\tau), \tau]\,d\tau. \tag{1}$$

Поясним приведенную формулу. Производственные фонды, используемые в момент времени t, как бы представляют собой набор однородных производственных ячеек, в каждой из которых (относящейся к моменту создания от τ до $\tau+d\tau$) объем фондов (выраженный в единицах продукта) равен $\varkappa(\tau)\,d\tau$ и количество трудовых единиц равно $\varphi(\tau)\,d\tau$. Количество чистого продукта, производимого в момент t (в единицу времени) каждой (однородной) производственной ячейкой, задается формулой $U[\varkappa(\tau)\,d\tau, \varphi(\tau)\,d\tau, \tau]$. Суммируя (интегрируя) по фондам различного возраста, получаем формулу (1).

Выпишем уравнения, которым подчинены эндогенные переменные модели.

Уравнение баланса трудовых ресурсов

$$\int_{m(t)}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau = T(t). \tag{2}$$

В условиях полной занятости количество трудовых единиц $\int_{m(t)}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau$, занятых на фондах, имеющихся к моменту t, равно численности трудоспособного населения $T(t)$.

Соотношение (2) можно записать в дифференциальной форме. Дифференцируя (2), получим

$$\varphi(t)=T'(t)+\varphi[m(t)]\,m'(t). \tag{3}$$

Уравнение в дифференциальной форме тоже имеет простой смысл: трудовые ресурсы, связанные с вновь созданными в интервале $[t, t+$

$+dt]$ фондами, складываются из естественного прироста трудовых ресурсов $dT(t)$ и трудовых единиц, снятых с выводимых в интервале $[m(t), m(t+dt)]$ фондов $\varphi[m(t)]dm(t)$ единиц.

Уравнение баланса по фондам

В варианте модели, в котором функция $\varkappa(t)$ является эндогенной переменной модели и равна постоянной части национального дохода, т. е. $\varkappa(t)=\gamma P(t)$ ($0<\gamma<1$ — постоянная норма накопления), справедливо соотношение

$$\varkappa(t)=\gamma\int\limits_{m(t)}^{t} U[\varkappa(\tau), \varphi(\tau), \tau]\,d\tau \tag{4}$$

Уравнение дифференциальной оптимизации

$$\frac{\partial U[\varkappa(t), \varphi(t), t]}{\partial\varphi(t)}=\frac{U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]}{\varphi(m(t))} \tag{5}$$

Это уравнение отражает принятый в модели критерий оптимизации, согласно которому политика вывода морально устаревших фондов и структура вновь создаваемых фондов являются оптимальными, если они обеспечивают максимальный темп роста национального дохода. Этот критерий состоит в последовательной максимизации национального дохода на бесконечно малых интервалах. Дадим качественный вывод уравнения (5). Математическую формулировку критерия дифференциальной оптимизации и более строгий вывод уравнения (5) можно найти в приложении к этой статье.

В левой части уравнения (5) стоит дифференциальная производительность труда в момент времени t или, другими словами, норма эффективности по одному из производственных факторов — трудовым ресурсам. Правая часть уравнения (5) есть производительность труда на фондах, созданных в момент времени $m(t)$. При дифференциально оптимальном развитии экономики эти величины должны быть равны в силу следующих качественных соображений. Рассмотрим, как влияет на производство продукции перевод малого количества единиц труда (обозначим его через ΔT) с фондов, созданных в момент времени $m(t)$ (выбывающих из производства в момент времени t), на фонды, созданные в момент t. На фондах времени t будет произведено дополнительно $\frac{\partial U[\varkappa(t), \varphi(t), t]}{\partial\varphi(t)}\Delta T$ единиц продукта, и при этом на фондах, созданных в момент $m(t)$ производство уменьшится на $\frac{U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]}{\varphi(m(t))}\Delta T$ единиц продукта. Если потери превысят дополнительное производство, т. е. если

$$\frac{\partial U[\varkappa(t), \varphi(t), t]}{\partial\varphi(t)}\Delta T<\frac{U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]}{\varphi(m(t))}\Delta T,$$

то перевод трудовых ресурсов на более современные фонды экономически не обоснован. Если же дальнейший перевод дополнительного количества трудовых ресурсов на более современные фонды позволяет увеличить суммарное производство продукции в момент времени t, т. е. если

$$\frac{\partial U[\varkappa(t), \varphi(t), t]}{\partial\varphi(t)}\Delta T>\frac{U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]}{\varphi(m(t))}\Delta T,$$

то рассматриваемая политика закрытия морально устаревших фондов не является оптимальной по критерию максимума прироста чистой продукции. Следовательно, дифференциально оптимальное развитие экономики требует равенства дифференциальной производительности труда на вновь создаваемых фондах и производительности труда на морально устаревших (наименее экономичных) к этому моменту фондах. Соответствующее уравнение и есть уравнение (5). Отметим, что для производственной функции типа Кобба-Дугласа

$$U[\varkappa(t),\ \varphi(t),\ t]=f(t)\,\varkappa^{\alpha}(t)\,\varphi^{\beta}(t),\quad \alpha+\beta=1$$

(здесь экзогенно заданная функция $f(t)$ моделирует технический прогресс, воплощенный в фондах периода t) уравнение дифференциальной оптимизации имеет следующий вид:

$$\beta f(t)\,\varkappa^{\alpha}(t)\,\varphi^{-\alpha}(t)=f(m(t))\,\varkappa^{\alpha}(m(t))\,\varphi^{-\alpha}(m(t))$$

2. О системе уравнений модели

Пусть в момент времени t_0 нам известны все параметры модели. Задача заключается в вычислении ее дальнейшего поведения. Остановимся сначала на более сложном варианте модели, в котором плотность ввода капиталовложений составляет постоянную часть национального дохода.

В момент времени t_0 в производстве участвуют фонды, созданные в течение временного интервала $m(t_0)\leqslant t\leqslant t_0$. Поэтому информация о начальном состоянии экономики подразумевает наличие следующих данных:

а) числа t_0 и числа $m(t_0)$ (причем $m(t_0)<t_0$);

б) функции $\varkappa(t)$ и функции $\varphi(t)$, заданных на отрезке $m(t_0)\leqslant t\leqslant t_0$.

При этом для начальных данных должно выполняться условие согласования

в) $$\frac{\partial U[\varkappa(t_0),\ \varphi(t_0),\ t_0]}{\partial\varphi}=\frac{U[\varkappa(m(t_0)),\ \varphi(m(t_0)),\ m(t_0)]}{\varphi(m(t_0))},$$

которое означает, что уравнение дифференциальной оптимизации выполняется в начальный момент времени t_0.

Уравнения модели в дифференциальной форме имеют вид:

$$\varphi(t)-\varphi(m(t))\,m'(t)=T'(t) \tag{i}$$

$$\varkappa'(t)=\gamma\{U[\varkappa(t),\ \varphi(t),\ t]-U[\varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t)),\ m(t)]\,m'(t)\} \tag{ii}$$

$$\frac{U[\varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t)),\ m(t)]}{\varphi[m(t)]}=\frac{\partial U[\varkappa(t),\ \varphi(t),\ t]}{\partial\varphi} \tag{iii}$$

Рассмотрим более общую систему

$$m'(t)=\Phi_1[\varkappa(t),\ m(t),\ t,\ \varphi(t),\ \varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t))] \tag{6}$$

$$\varkappa'(t)=\Phi_2[\varkappa(t),\ m(t),\ t,\ \varphi(t),\ \varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t))] \tag{7}$$

$$\varphi(t)=\Phi_3[\varkappa(t),\ m(t),\ t,\ \varphi(t),\ \varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t))], \tag{8}$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 — известные функции. Чтобы исходную систему привести к такому виду, нужно из уравнения (i) выразить $m'(t)$ и подставить найденное выражение для $m'(t)$ в правую часть уравнения (ii). Затем надо разрешить уравнение (iii) относительно $\varphi(t)$. Будем считать, что функция U удовлетворяет следующим естественным предположениям: 1) функция U строго выпуклая по φ, т. е. $\frac{\partial U}{\partial\varphi}$ строго монотонно убывает с ростом φ; 2) $\lim\limits_{\varphi\to 0+}\frac{\partial U}{\partial\varphi}=+\infty$ 3) $\lim\limits_{\varphi\to\infty}\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0$. В этих предположениях уравнение (iii) всегда разрешимо относительно φ и, следовательно, система уравнений (*i*) — (*iii*) приводится к виду (6) — (8).

Рассмотрим решение системы уравнений (6) — (8) со следующими данными:

1) даны числа t_0 и $m(t_0)$ (причем $m(t_0) < t_0$;

2) даны функции $\varkappa(t)$ и $\varphi(t)$, заданные на отрезке $m(t_0) \leqslant t \leqslant t_0$.

При этом будем предполагать выполненными условия согласования:

3) $\varphi(t_0) = \Phi_3[\varkappa(t_0),\ m(t_0),\ t_0,\ \varkappa(m(t_0)),\ \varphi(m(t_0))]$.

Систему уравнений (6) — (8) с начальными данными 1) — 3) можно решать следующим образом: подставим выражение для $\varphi(t)$ из уравнения (8) в правые части уравнений (6) — (7). Получим уравнение вида

$$m'(t) = G_1[\varkappa(t),\ m(t),\ t,\ \varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t))] \tag{9}$$

$$\varkappa'(t) = G_2[\varkappa(t),\ m(t),\ t,\ \varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t))]. \tag{10}$$

Если значения функции $m(t)$ заключены на отрезке $[m(t_0),\ t_0]$, т. е. если $m(t_0) \leqslant m(t) \leqslant t_0$, то функции $\varkappa(m(t))$ и $\varphi(m(t))$ известны из начальных данных. Поэтому система (9) — (10) в этих предположениях является, по существу, системой обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения $m(t)$ и $\varkappa(t)$ (с начальными данными $m(t_0)$ и $\varkappa(t_0)$). Будем предполагать, что для решения системы (9) — (10) функция $m(t)$ монотонно возрастает (такая предпосылка была сделана при моделировании). До тех пор, пока $m(t)$ будет оставаться меньше t_0, правые части системы (9) — (10) будут определены. Эту систему можно решать на ЭВМ (приближенными методами) до критического момента t_1, при котором $m(t_1) = t_0$. После этого нам станут известны функции $m(t)$ и $\varkappa(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Уравнение (8) даст теперь возможность найти функцию $\varphi(t)$ на этом отрезке. Итак, функции $\varkappa(t)$ и $\varphi(t)$ теперь уже известны на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Подставляя их в правые части системы (9) — (10) получим новую систему дифференциальных уравнений для $m(t)$ и $\varkappa(t)$ на участке $t_0 \leqslant m(t) \leqslant t_1$. Она будет определена до критического момента t_2, для которого $m(t_2) = t_1$. Повторяя эту конструкцию, мы будем последовательно вычислять неизвестные функции на отрезке $[t_2,\ t_3]$, где $m(t_3) = t_2$, на отрезке $[t_3,\ t_4]$, где $m(t_4) = t_3$, и т. д.

Вариант модели, для которого функция $\varkappa(t)$ задана экзогенно, приводит к аналогичной, но более простой системе уравнений. Начальными данными здесь служат:

а) числа t_0 и $m(t_0)$ (причем $m(t_0) < t_0$);

б) функция $\varphi(t)$, заданная на отрезке $[m(t_0),\ t_0]$.

Для начальных данных также должно быть выполнено условие согласования 3).

Приведенных соображений достаточно для решения системы уравнений на ЭВМ. Отметим, что этим способом можно решать и аналогичную систему уравнений для вектор-функций $\varkappa(t)$, $\varphi(t)$, т. е. систему, в которой $\vec{\varkappa}(t) = \varkappa_1(t), \ldots, \varkappa_k(t)$ — k-мерная вектор-функция, $\vec{\varphi}(t) = \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — n-мерная вектор-функция, уравнения (7), (8) тоже векторные:

$$\vec{\varkappa}'(t) = \Phi_2(\vec{\varphi}(t),\ \vec{\varkappa}(t), \ldots,)$$

$$\vec{\varphi}(t) = \Phi_3(\vec{\varphi}(t),\ \vec{\varkappa}(t), \ldots,)$$

Более общим образом можно рассмотреть систему, в которой $\vec{m}(t) =$

$=m_1(t), \ldots, m_N(t)$ — тоже вектор-функция. При этом можно рассматривать уравнения с правыми частями, зависящими от значений $\vec{\varkappa}(t)$, $\vec{\varphi}(t)$ в точках t, $m_1(t), \ldots, m_N(t)$.

Исследовать подобные системы достаточно трудно. Отметим, что теория уравнений с отклоняющимся аргументом рассматривает подобные системы, но в ней функции отклонения $m_1(t), \ldots, m_N(t)$ предполагаются заданными (а не находятся из уравнений, как в рассматриваемой нами системе). Рассмотренный метод решения аналогичен методу шагов в теории уравнений с отклоняющимся аргументом. По-видимому, системы с переменным отклонением ранее не рассматривались.

3. Экспоненциальные решения модели и анализ динамики макроэкономических показателей

В некоторых случаях конкретизация определяющих модель соотношений и экзогенных параметров позволяет найти типичные аналитические решения системы уравнений модели. Здесь мы воспользуемся указанными в работе [7] экспоненциальными решениями модели для выявления характера зависимости динамики макроэкономических показателей (национальный доход, норматив эффективности капиталовложений и др.) от таких параметров экономической системы, как темп роста трудовых ресурсов, норма накопления и темпы технического прогресса. Скажем коротко об условиях, при которых могут быть построены экспоненциальные решения уравнений модели.

Производственной функцией принимается функция Кобба-Дугласа с экспоненциальным ростом эффективности фондов в зависимости от момента их создания, т. е.

$$U[\varkappa(t),\ \varphi(t),\ t] = e^{\delta t}\varkappa^{\alpha}(t)\,\varphi^{\beta}(t), \quad \alpha+\beta=1.$$

Рост трудовых ресурсов предполагается экспоненциальным: $T(t)=T_0e^{pt}$, где T_0 — ресурсы труда в нулевой момент времени, p — (демографическая норма роста.

В варианте модели, в котором $\varkappa(t)$ задана экзогенно, предполагается экспоненциальный рост капиталовложений $\varkappa(t)=\varkappa_0e^{\mu t}$; параметры $\varkappa_0$ и μ заданы. Решение системы уравнений (3), (5) имеет в этих условиях следующий вид:

$$m(t)=t-a, \quad a=\frac{-\ln\beta}{\delta+\alpha(\mu-p)} \tag{11}$$

$$\varphi(t)=\varphi_0e^{pt}, \quad \varphi_0=pT_0\frac{1}{1-\exp\left[\dfrac{p\ln\beta}{\delta+\alpha(\mu-p)}\right]} \tag{12}$$

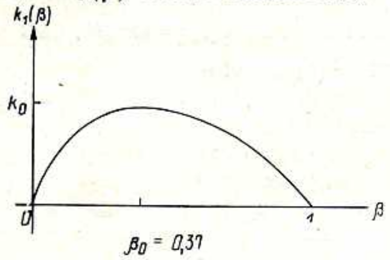
В варианте модели, в котором $\varkappa(t)$ является эндогенной переменной модели, принимается, что $\varkappa(t)$ имеет экспоненциальный вид. Предполагается, что инвестируется постоянная часть национального дохода, т. е. $\varkappa(t)=\gamma P(t)$, где γ — норма накопления. Экспоненциальные решения уравнений (3)—(5), описывающих модель, имеют такой вид:

$$m(t)=t-a, \quad a=\frac{-\beta\ln\beta}{\delta} \tag{13}$$

$$\varphi(t)=\varphi_0e^{pt}, \quad \varphi_0=pT_0\frac{1}{\left(1-\beta^{\frac{p\beta}{\delta}}\right)} \tag{14}$$

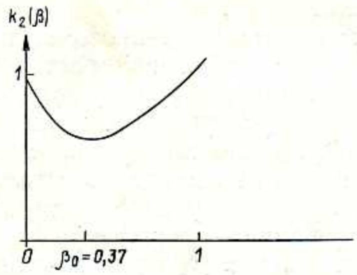
$$\varkappa(t)=\varkappa_0 e^{\left(p+\frac{\delta}{\beta}\right)t}, \quad \varkappa_0=\gamma^{\frac{1}{\beta}} pT_0 \frac{1}{\left(1-\beta^{\frac{p\beta}{\delta}}\right)} \left[\frac{1-\beta^{1+\frac{p\beta}{\delta}}}{p+\frac{\delta}{\beta}}\right]^{\frac{1}{\beta}} \qquad (15)$$

Вид функции $m(t)$, $\varphi(t)$ и $\varkappa(t)$ (формулы (13)—(15)) определяет динамику капиталовложений и политику списания фондов в развитии экономики с эндогенным характером капиталовложений (на базе построенной динамической модели экономики). Величина $a=t-m(t)$ определяет длительность временного интервала, по истечении которого фонды становятся экономически неэффективными (срок морального износа фондов). Из формулы (13) следует, что срок использования фондов не зависит от момента создания фондов (величина a не зависит от t) и обратно пропорционален темпу овеществленного технического прогресса (коэффициенту δ). Величина a зависит от коэффициента β — элластичности трудовых ресурсов в производственной функции типа Кобба-Дугласа. Величина a пропорциональна величине $k_1(\beta)= =-\beta\ln\beta$. График функции $k_1(\beta)$ имеет такой вид:



Максимум функции $k_1(\beta)$ достигается в точке $\beta_0=\frac{1}{e}\approx 0{,}37$, реальное значение коэффициента β обычно превосходит β_0; следовательно, можно сделать вывод: при повышении коэффициента элластичности трудовых ресурсов сокращается срок использования фондов.

Для определения зависимости функции $\varphi(t)$ от параметра β рассмотрим функцию $k^2(\beta)=\beta^{\frac{p\beta}{\delta}}$. График функции $k_2(\beta)$ имеет вид:



Минимум функции $k_2(\beta)$ достигается в той же точке $\beta_0\approx 0{,}37$.

Следовательно, при повышении элластичности трудовых ресурсов в функции Кобба-Дугласа возрастает плотность ввода трудовых ресурсов.

Рассмотрим зависимость функции $\varkappa(t)$ от параметров p, δ и β. Показатель $\mu=p+\frac{\delta}{\beta}$ характеризует темп роста капиталовложений, величина μ показывает, что темп роста капиталовложений превосходит демографическую норму роста на величину $\frac{\delta}{\beta}$, которая возрастает при повышении темпа технического прогресса (коэффициент δ) и уменьшается при увеличении коэффициента β. Полученная зависимость количественно выражает тот факт, что технический прогресс воплощен в фонды и при понижении роли капитала в выпуске (увеличение коэффициента β) уменьшается влияние технического прогресса на темп роста экономики.

Найденные экспоненциальные решения для рассматриваемой модификации модели (эндогенный характер капиталовложений) позволят нам проследить динамику важнейших макроэкономических показателей: национального дохода, норматива эффективности капиталовложений, структуры фондов данного возраста и совокупного объема производственных фондов. Формулы, которые мы получим для исчисления названных экономических характеристик, дадут возможность оценить влияние (в рамках рассматриваемой модели экономики) технического прогресса и других параметров модели на эти экономические показатели.

Национальный доход. Для исчисления национального дохода в модели имеется формула (1), однако для найденного решения проще воспользоваться соотношением $\varkappa(t)=\gamma P(t)$, из которого $P(t)=\frac{\varkappa(t)}{\gamma}$. Получаем формулу для $P(t)$ в виде

$$P(t)=P_0 e^{\left(p+\frac{\delta}{\beta}\right)t}, \tag{16}$$

где

$$P_0=\gamma^{\frac{\alpha}{\beta}} pT_0 \frac{1}{\left(1-\beta^{\frac{p\beta}{\delta}}\right)}\left[\frac{1-\beta^{1+\frac{p\beta}{\delta}}}{p+\frac{\delta}{\beta}}\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Формула (16) показывает, что национальный доход растет по экспоненте, показатель которой линейно зависит от темпа технического прогресса. Темп роста национального дохода на душу населения (при постоянном отношении трудовых ресурсов к общей численности населения) прямо пропорционален темпу технического прогресса и обратно пропорционален коэффициенту элластичности трудовых ресурсов в функции Кобба-Дугласа.

Национальный доход для найденного экспоненциального развития экономики пропорционален норме накопления в степени α/β; из статистического оценивания параметров производственной функции типа Кобба-Дугласа обычно получается, что данное отношение меньше единицы. Это означает, что при понижении нормы накопления национальный доход будет понижаться, но менее значительно.

Структура фондов. Параметр $\lambda(t)$ — структура создаваемых в момент времени t новых фондов — характеризуемый ценой (выраженной в продукте) единичных фондов (фондов, приходящихся на единицу труда), иначе говоря, обеспечиваемая ими степень фондовооруженности. Предполагается, что фонды, создаваемые в момент времени t, однотипные ($\lambda(t)$ — однозначная функция t). Очевидно, величина $\lambda(t)\varphi(t)\,dt$ показывает объем вновь созданных фондов за время $[t, t+dt]$. Следовательно, справедливо следующее равенство: $\lambda(t)\varphi(t)=\varkappa(t)$. Отсюда для функции $\lambda(t)$ получается формула

$$\lambda(t)=\lambda_0 e^{\frac{\delta}{\beta}t}, \quad \lambda_0=\gamma^{\frac{1}{\beta}}\left[\frac{1-\beta^{1+\frac{p\beta}{\delta}}}{p+\frac{\delta}{\beta}}\right]^{\frac{1}{\beta}}. \tag{17}$$

Темпы роста структуры вводимых фондов (фонды на одно рабочее место) пропорциональны темпам технического прогресса, но значительно превосходят его.

Структура вводимых фондов пропорциональна норме накопления в степени $\frac{1}{\beta}$. Отсюда можно сделать вывод, что повышение или понижение принятой нормы накопления означает более резкое повышение или понижение фондовооруженности на новых предприятиях.

Норма эффективности капиталовложений. Для исчисления этого важнейшего экономического показателя ранее нами была [6] получена (в условиях построенной модели) следующая формула:

$$n(t) = \alpha e^{\delta t} \lambda^{\alpha - 1}(t).$$

Подставим в нее выражение для функции $\lambda(t)$ из формулы (17) и получим формулу для $n(t)$

$$n(t) = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{p + \frac{\delta}{\beta}}{1 - \beta^{1 + \frac{p\beta}{\delta}}}. \tag{18}$$

Для данного решения модели норма эффективности является постоянной величиной (обозначим ее через n_0) и зависит лишь от параметров p, γ, β, δ. Влияние темпов технического прогресса на величину нормы эффективности при различных значениях параметров p, γ и β можно проследить, если рассмотреть величину n_0 как функцию пара-

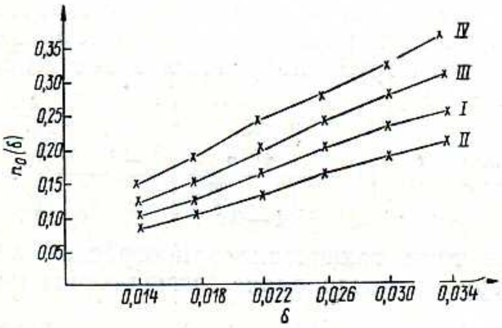


Рис. 1. Зависимость нормы эффективности капиталовложений от темпов технического прогресса

метра δ. Эта зависимость представлена на рисунке 1. Приняты следующие значения параметров p, γ и δ:

кривая I	$p=0,02$	$\gamma=0,25$	$\beta=0,7$
кривая II	$p=0,01$	$\gamma=0,25$	$\beta=0,7$
кривая III	$p=0,02$	$\gamma=0,25$	$\beta=0,6$
кривая IV	$p=0,01$	$\gamma=0,15$	$\beta=0,7$

Норма эффективности капиталовложений обратно пропорциональна норме накопления (параметр γ) и понижается при росте коэффициента эластичности трудовых ресурсов (параметр β).

В случае постоянной функции $T(t)$ — постоянные трудовые ресурсы — для норматива эффективности капиталовложений получается совсем простая формула

$$n(t)=\frac{\delta}{\gamma\beta}.$$

Норма эффективности капиталовложений пропорциональна темпу технического прогресса.

Объем производственных фондов. К моменту времени t в производстве участвуют фонды, созданные во временном интервале $[m(t), t]$. Функция $\varkappa(t)$ задает объем ввода фондов в единицу времени; интегрируя ее в указанном интервале, получаем выражение для исчисления объема фондов, имеющихся на момент времени t (обозначим эту величину через $K(t)$):

$$K(t)=K_0 e^{\left(p+\frac{\delta}{\beta}\right)t}, \text{ где } K_0=\frac{\gamma^{\frac{1}{\beta}} pT_0}{\left(1-\beta^{\frac{p\beta}{\delta}}\right)}\left[\frac{p+\frac{\delta}{\beta}}{1-\beta^{1+\frac{p\beta}{\delta}}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}. \qquad (19)$$

Темп роста объема производственных фондов (балансовая оценка фондов) совпадает для экспоненциального решения с темпом роста капиталовложений (формула (15)). Следовательно, к динамике объема производственных фондов применимы те же выводы о зависимости от параметров δ, p, γ и β, что и к динамике капиталовложений.

Полученные в этом пункте выражения для исчисления национального дохода, норматива эффективности капиталовложений, структуры вводимых фондов и объема производственных фондов позволяют проследить динамику некоторых экономических показателей, которые получаются из названных с помощью простых преобразований. Например, для производительности труда получается такое выражение:

$$\Pi(t)=\frac{P(t)}{T(t)}=\Pi_0 e^{\frac{\delta}{\beta}t}, \quad \Pi_0=\frac{\gamma^{\frac{\alpha}{\beta}} p}{\left(1-\beta^{\frac{p\beta}{\delta}}\right)}\left[\frac{1-\beta^{1+\frac{p\beta}{\delta}}}{p+\frac{\delta}{\beta}}\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Из него видно, что темп технического прогресса влияет на рост производительности труда. Фондоотдача, вычисляемая по формуле

$$\Phi(t)=\frac{P(t)}{K(t)}=\frac{1}{\gamma}\left[\frac{p+\frac{\delta}{\beta}}{1-\beta^{1+\frac{p\beta}{\delta}}}\right],$$

будет постоянной по времени величиной.

Необходимо отметить, что выражения для исчисления макроэкономических показателей получены в этом пункте для частного случая модели — экспоненциального вида основных переменных модели, и выводы, сделанные в этом параграфе о динамике таких показателей, справедливы лишь для экспоненциального развития экономики.

4. Оценка эффективности факторов производства и влияние технического прогресса на темп роста национального дохода

При исчислении объема производственных фондов цена оборудования данного поколения определялась объемом капиталовложений, затраченных на создание этого оборудования. Рассчитанная таким образом цена оборудования будет постоянной в течение всего срока его использования (без учета физического износа). Если же рассматривать цену оборудования как оценку его экономической эффективности (за остаточное время службы), то необходимо, на наш взгляд, учитывать моральный износ фондов и, как следствие, падение их экономической оценки. Используем построенную модель экономики для определения цены оборудования как меры его экономической эффективности.

Рассмотрим единичные фонды (фонды, приходящиеся на единицу труда), созданные в момент времени τ. Выделим временной интервал $[t, t+dt]$ использования этих фондов $(\tau<t)$. Использование единицы труда на данных фондах создает за этот интервал $U\left[\frac{\varkappa(\tau)}{\varphi(\tau)}, 1, \tau\right]$ единиц продукта. Эффект определяется оценками труда и капитала. Оценка и эффект капитала (фондов поколения τ) выражаются прокатной оценкой фондов (прокатную оценку единичных фондов, созданных в момент τ, в момент t обозначим через $Q(t, \tau)$). Затраты труда определяются посредством оценки экономической эффективности единицы труда. Эта оценка, естественно, не зависит от возраста оборудования, на котором используется эта единица труда. Таким образом, равенство суммарной оценки факторов производства и полученного эффекта дает соотношение

$$U[\lambda(\tau), 1, \tau]\,\Delta t = Q(t, \tau)\,\Delta t + R(t)\,\Delta t.$$

Здесь $R(t)$ — оценка экономической эффективности единицы труда в момент t (в единицу времени), $\lambda(t)=\frac{\varkappa(t)}{\varphi(t)}$.

Вполне естественно считать, что прокатная оценка фондов, выбывающих из производства в момент времени t, равна (в этот момент времени) нулю, т. е. $Q(t, m(t))=0$. Отсюда следует формула для исчисления оценки экономической эффективности (предельной) единицы труда

$$R(t)=U[\lambda(m(t)), 1, m(t)].$$

Зная $R(t)$, можно определить и прокатную оценку единичных фондов возраста τ в момент t (момент использования этих фондов)

$$Q(t, \tau)=U[\lambda(\tau), 1, \tau]-U[\lambda(m(t)), 1, m(t)]. \tag{20}$$

Прокатная оценка определяется разностью между производительностью труда на фондах, созданных в момент τ, и производительностью труда на фондах, созданных в более ранний момент $m(t)$.

Зная прокатную оценку единичных фондов, созданных в момент τ, можно определить их остаточную экономическую оценку для любого момента времени $t(\tau<t)$. Под остаточной экономической оценкой этих фондов в момент времени t будем понимать их суммарный вклад в производство продукции (с учетом дисконтирования) за период от момента t до момента вывода этих фондов из производства.

Обозначим через $\Gamma(\tau)$ момент вывода из производства фондов, созданных в момент τ. Очевидно, что $m(\Gamma(t))=t$, т. е. $\Gamma(t)$ функция, обратная к t. Остаточную экономическую оценку единичных фондов, созданных в момент τ, исчисленную в момент t, будем обозначать через $Э(t,\tau)$. Исходя из прокатной оценки, получим выражение для $Э(t, \tau)$ в виде

$$Э(t, \tau)=\int_t^{\Gamma(\tau)} f(\theta, t)\,Q(\theta, \tau)\,d\theta. \tag{21}$$

Здесь $f(\theta, t)$ — коэффициент приведения оценки (продукта) момента θ к моменту t $(t < \theta)$.

Легко показать, что коэффициент $f(\theta, t)$ выражается через норму эффективности капиталовложений следующим образом: $f(\theta, t) = e^{-\int_t^\theta n(\xi)\,d\xi}$.

Вычислив экономическую оценку единичных фондов, созданных в момент τ, можно получить и общую экономическую оценку фондов, участвующих в производстве на момент t. Эта оценка (обозначим ее через $K_1(t)$) складывается из остаточных экономических оценок (на момент t) фондов различных поколений. Поэтому для получения выражения для $K_1(t)$ достаточно проинтегрировать величину $Э(t, \tau)$ по τ в промежутке $[m(t), t]$.

$$K_1(t) = \int_{m(t)}^{t} Э(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{22}$$

Такая общая экономическая оценка действующих на момент t производственных фондов (цена действующих фондов) лучше отражает производственный потенциал (национальное богатство) экономической системы, чем объем фондов, исчисленный по стоимости (балансовой стоимости) их ввода

$$K(t) = \int_{m(t)}^{t} \varkappa(\tau)\,d\tau.$$

Определим, какие выражения получаются для прокатной и экономической оценок единичных фондов на траекториях развития экономической системы, заданных экспоненциальными решениями. Рассмотрим вариант модели с эндогенным заданием функции $\varkappa(t)$.

Прокатная оценка. Производительность труда на фондах, введенных в момент t, выражается формулой $\Pi(t) = U[\lambda(t), 1, t]$. Для экспоненциальных решений для $\lambda(t)$ получено выражение (17), отсюда для $\Pi(t)$ получаем формулу

$$\Pi(t) = e^{\delta t}\lambda^{\alpha}(t) = \lambda_0^{\alpha} e^{\frac{\delta}{\beta} t}, \quad \lambda_0 = \gamma^{\frac{1}{\beta}} \left[\frac{1 - \beta^{1 + \frac{p\beta}{\delta}}}{p + \frac{\delta}{\beta}} \right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Из формулы (20) для прокатной оценки получаем следующее выражение:

$$Q(t, \tau) = \Pi(\tau) - \Pi(m(t))$$

или, пользуясь уравнением дифференциальной оптимизации (5), имеем

$$Q(t, \tau) = \Pi(\tau) - \beta\Pi(t).$$

Отсюда

$$Q(t, \tau) = \lambda_0^{\alpha}\left[e^{\frac{\delta}{\beta}\tau} - \beta e^{\frac{\delta}{\beta} t}\right], \tag{23}$$

$$\lambda_0 = \gamma^{\frac{1}{\beta}} \left[\frac{1 - \beta^{1 + \frac{p\beta}{\delta}}}{p + \frac{\delta}{\beta}} \right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

имеют различную эффективность. Это обстоятельство, на наш взгляд, требует введения корректирующего коэффициента для той доли национального дохода, которая идет на накопление, чтобы исключить возможную ее недооценку.

Конечно, если бы часть продукта, выделенная на накопление, реализовывалась на приобретение средств производства, создаваемых вне данной экономической системы (с улучшающимися параметрами в соответствии с имеющим место техническим прогрессом), то в таком анализе не было бы надобности, так как единственным конечным продуктом данной системы является основной продукт.

Однако если средства производства создаются в той же самой системе за счет использования ресурсов, выделенных на накопление, причем только объем этих средств производства определяется выделенной на накопление долей продукта, а физическое содержание есть конкретные средства производства и они составляют действительную долю конечного продукта, производимого соответствующим подразделением экономической системы, то эта часть должна и надлежащим образом оцениваться, хотя мы и не описываем явно механизма функционирования данного подразделения нашей экономической системы. То есть просто предполагается, что вместо доли продукта в объеме $\varkappa(t)\,dt$ создаются (и могут быть созданы) необходимые средства производства. Оценивая их так же, как и основной продукт, в «неизменных ценах» — ценах предыдущего периода, мы получаем существенную поправку к оценке конечного продукта данной системы.

Для изучения зависимости величины такого корректирующего коэффициента от экономических параметров системы и для изучения влияния технического прогресса на темп роста национального дохода уместно использовать построенную динамическую модель экономики, в которой фонды различаются именно по моментам их создания.

Рассмотрим два момента времени: t и t_0, $(t > t_0)$. Объем единичных фондов, созданных в момент t, составляет $\frac{\varkappa(t)}{\varphi(t)} = \lambda(t)$ единиц продукта (балансовая стоимость единичных фондов). Производительность единицы труда на этих фондах составит $\Pi(t) = U[\lambda(t),\ 1,\ t]$ единиц продукта. Определим эквивалентный (по эффективности) объем фондов на единицу труда, который нужно произвести в более ранний момент t_0, а именно, такой объем фондов поколения t_0, на котором единица труда может произвести те же $\Pi(t)$ единиц продукта. Обозначим этот объем фондов через $x(t_0)$. По определению величины $x(t_0)$, имеем

$$U[x(t_0),\ 1,\ t_0] = U[\lambda(t),\ 1,\ t]. \tag{27}$$

Функция $U[x,\ 1,\ t_0]$ строго монотонно возрастает по первому аргументу. Поэтому из соотношения (27) $x(t_0)$ однозначно выражается через $\lambda(t)$, t и t_0

$$x(t_0) = f(\lambda(t),\ t,\ t_0).$$

Отношение $\frac{x(t_0)}{\lambda(t_0)}$ будем называть коэффициентом удорожания фондов, созданных в момент t, по отношению к фондам, созданным в базовый момент времени t_0. Обозначим этот коэффициент через $k(t)$.

В момент времени t в экономической системе производится $P(t)$ единиц продукта (в единицу времени), где $P(t)$ вычисляется по формуле (1). Из этого объема произведенной продукции постоянная часть — $\gamma P(t)$ единиц — идет на создание новых фондов (лаг не учитывается). С учетом повышения (по отношению к базовому моменту времени t_0) качества вводимых фондов национальный доход (обозначим его через $P^*(t)$) можно рассчитывать в модели по следующей формуле:

$$P^*(t)=(1-\gamma)P(t)+k(t)\cdot\gamma P(t). \tag{28}$$

Интересно сравнить темп роста национального дохода, исчисленного с учетом повышения качества продукции, созданной в сфере производства средств производства $\left(\text{величина } \frac{1}{P^*(t)}\cdot\frac{dP^*(t)}{dt}\right)$, с темпом роста национального дохода, исчисленного по объему произведенной продукции $\left(\text{величина } \frac{1}{P(t)}\cdot\frac{dP(t)}{dt}\right)$

$$\frac{1}{P^*(t)}\cdot\frac{dP^*(t)}{dt}-\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}=\frac{\dot{k}(t)}{k(t)+\frac{1}{\gamma}-1}. \tag{29}$$

Рассмотрим случай, когда в качестве производственной функции принимается функция Кобба-Дугласа с экспоненциальным ростом эффективности фондов в зависимости от момента их создания.

$$U[\varkappa(t),\ \varphi(t),\ 1]=e^{\delta t}\varkappa^{\alpha}(t)\,\varphi^{\beta}(t),\quad \alpha+\beta=1.$$

Уравнение (27) в этом случае принимает вид $e^{\delta t_0 \alpha}x(t_0)=e^{\delta t}\lambda^{\alpha}(t)$, отсюда коэффициент удорожания фондов $k(t)$ выражается формулой $k(t)=e^{\frac{\delta}{\alpha}(t-t_0)}$. Из этой формулы можно заключить, что повышение темпов технического прогресса приводит к трехкратному ($\alpha\approx0{,}3$) увеличению темпов роста качества вводимых фондов.

Увеличение темпа роста национального дохода при учете качества вводимых фондов (выражение (29)) в этом случае выразится формулой

$$\Delta\mu=\frac{1}{P^*(t)}\frac{dP^*(t)}{dt}-\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}=\frac{\gamma\delta}{\alpha}\left[\frac{e^{\frac{\delta}{\alpha}(t-t_0)}}{(1-\gamma)+\gamma e^{\frac{\delta}{\alpha}(t-t_0)}}\right],$$

где $\Delta\mu$ — поправка к темпу роста национального дохода, связанная с учетом качества продукции, созданной в сфере производства средств производства. Полученная формула показывает, на сколько занижается темп роста национального дохода, если не учитывается улучшение экономических параметров новых фондов (по отношению к базовому моменту времени).

Если рассматривать момент времени t, близкий к базовому (например, $t=t_0+1$ — два соседних года), то поправка к темпу роста национального дохода, исчисленного в момент t, с хорошей точностью будет равна $\Delta\mu=\frac{\gamma\delta}{\alpha}\cdot100\%$. При значении параметров $\gamma=0{,}25$; $\delta=0{,}014$ и $\alpha=0{,}3$ эта поправка составит 1,2 процента.

Приложение

Принцип дифференциальной оптимизации

Рассмотрим некоторое множество A векторозначных функций γ переменной t: $\gamma(t)=\{\gamma_0(t),\ \gamma_1(t),\ \ldots,\ \gamma_n(t)\}$. Вектор-функция $\gamma(t)$ из множества A называется траекторией; каждая траектория описывает один из возможных вариантов развития системы. Будем предполагать, что все траектории $\gamma(t)$ — гладкие функции с конечным числом точек разрыва. В точке t_0 разрыва траектории $\gamma(t)$ будем рассматривать два вектора:

$$\gamma^+(t)=\lim_{t\to t_0^+}\gamma(t) \text{ и } \gamma^-(t_0)=\lim_{t\to t_0^-}\gamma(t).$$

Компонента $\gamma_0(t)$ траектории $\gamma(t)$ играет особую роль. Предполагаем, что $\gamma_0(t)$ — непрерывная функция, причем $\gamma_0(t)\leqslant t$. Отрезок $[\gamma_0(t), t]$ будем называть «отрезком влияния» траектории $\gamma(t)$ в момент времени t.

Пусть на траекториях задан целевой функционал $F_\gamma(t)$, зависящий от траектории γ и времени t. Относительно функционала $F_\gamma(t)$ предполагаются выполненными следующие условия:

а) если траектория $\tilde{\gamma}$ совпадает с траекторией γ на ее отрезке влияния $[\gamma_0(t), t]$ в момент времени t, то $F_{\tilde{\gamma}}(t)=F_\gamma(t)$. Условие а) означает, что функционал F не зависит от будущего развития системы и вполне определяется ее предысторией.

б) для любой траектории γ функция времени $F_\gamma(t)$ имеет правую производную $F'^{+}_{\gamma}(\gamma)$.

Определение 1. Траектория γ называется дифференциально оптимальной в точке t_0 относительно функционала F_φ, если для любой другой траектории $\tilde{\gamma}$ такой, что $\tilde{\gamma}(t)=\gamma(t)$ при $\gamma_0(t_0)\leqslant t\leqslant t_0$ выполнено условие:

$$F'^{+}_{\gamma}(t_0)\geqslant F'^{+}_{\tilde{\gamma}}(t_0).$$

Определение 2. Траектория $\gamma(t)$ называется дифференциально оптимальной на отрезке $[a, b]$ относительно функционала F, если она дифференциально оптимальная в каждой точке этого отрезка $[a, b]$. Будем говорить, что дифференциально оптимальные траектории удовлетворяют критерию дифференциальной оптимизации.

Образно говоря, дифференциально оптимальная траектория все время движется в сторону наибольшего роста функционала F. Приведем теперь один наглядный геометрический пример.

Пример. В качестве траектории $\gamma(t)$ рассмотрим траектории с отрезком влияния нулевой длины $(\gamma(t)=t)$, которые задают непрерывное кусочно-гладкое движение точки $x(t)$ в n-мерном пространстве R^n, $\gamma(t)=(t, x(t))$, $x(t)=\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ со скоростью, не превосходящей единицы, т. е.

$$\|x'(t)\|=\sqrt{x_1'^2(t)+\ldots+x_n'^2(t)}\leqslant 1.$$

Пусть целевой функционал $F_\gamma(t)$ есть значение гладкой функции $G(x)$ в точке $x(t)$. Траектория $\gamma(t)=\{t, x(t)\}$ будет в этом примере дифференциально оптимальной, если точка $x(t)$ «поднимается по градиенту» функции G со скоростью 1, т. е. если

$$x'(t)=\frac{\operatorname{grad} G(t)}{\|\operatorname{grad} G(t)\|}.$$

Действительно, имеем $F'_\gamma(t)=\frac{d}{dt}G(x(t))=\langle \operatorname{grad} G, x'\rangle$. Для траектории $x(t)$ выполнено неравенство $\|x'(t)\|\leqslant 1$, поэтому скалярное произведение $\langle \operatorname{grad} G, x'\rangle$ будет наибольшим, если вектор $x'(t)$ коллинеарен вектору $\operatorname{grad} G$ и равен по длине единице.

Пусть траектория $\gamma(t)$ — дифференциально оптимальная в точке t_0 и $\tilde{\gamma}(t)$ — другая траектория, такая, что при $t<t_0$, $\gamma(t)=\tilde{\gamma}(t)$. Тогда

можно подобрать такую функцию $\alpha(t)$, что для нее выполнено условие

$$\frac{\alpha(t)}{t-t_0} \to 0 \text{ при } t \to 0 \text{ и}$$

$$F(\gamma(t)) + \alpha(t) \geqslant F(\tilde{\gamma}(t)) \text{ при } t_0 \leqslant t < \infty.$$

Это утверждение сразу вытекает из определения дифференциальной оптимальности. Оно показывает, что если траектория $\gamma(t)$ и «лучше» дифференциально оптимальной в смысле функционала F, то лишь на бесконечно малую величину второго порядка малости. В этом утверждении нельзя избавиться от малой величины $\alpha(t)$ даже в окрестности точки t_0. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример.

Мы будем оставаться в рамках предыдущего геометрического примера при $n=2$. Пусть U — любая область на плоскости, не содержащая точки 0, и $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$ — непрерывная ветвь функции φ, где $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$ — угол между вектором (γ_1, γ_2) и положительным направлением оси γ_1. Дифференциально оптимальные траектории в этом примере — концентрические окружности с центром в точке 0. Пусть $\gamma(t)$ — одна из таких окружностей, проходимая со скоростью 1. Пусть $\tilde{\gamma}(t)$ — траектория движения по окружности, лежащей внутри $\gamma(t)$, касающаяся ее в точке t_0, причем $\tilde{\gamma}(t)$ охватывает точку 0 и $\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = 1$. Тогда, как нетрудно вычислить, для всех t, таких что $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon$, справедливо неравенство $G(\tilde{\gamma}(t)) > G(\gamma(t))$.

Для полноты картины приведем без доказательства два утверждения, относящихся к рассматриваемому в этом пункте геометрическому примеру.

Утверждение 1. Допустим, что линия $\gamma(t)$ «подъема по градиенту», начинающаяся в точке x_0 — прямая. Тогда для любой другой траектории $\tilde{\gamma}(t)$, начинающейся в этой же точке x_0, найдется такое $\varepsilon > 0$, что при всех t, таких что $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon$, справедливо неравенство

$$G(\gamma(t)) > G(\tilde{\gamma}(t)).$$

Утверждение 2. Допустим, что линия $\gamma(t)$ «подъема по градиенту», начинающаяся в точке x_0, не совпадает с отрезком прямой ни на каком участке. Тогда найдется такая траектория $\tilde{\gamma}(t)$, что неравенство $G(\gamma(t)) > G(\tilde{\gamma}(t))$ не может иметь места ни на каком интервале $t_0 < t < t_0 + \varepsilon$.

Замечание. Помимо дифференциально оптимальных траекторий движения системы, можно рассматривать и такие траектории, на которых достигается максимум целевого функционала в концах временных интервалов фиксированной длины a (a — длина периода планирования). Так, скажем, что траектория $\gamma(t)$ оптимальна с плановым периодом длины a (и началом отсчета t_0), если для любого натурального n и любой траектории $\tilde{\gamma}(t)$ такой, что $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + (n-1)a$, имеет место неравенство $F(\gamma(t), t_0, na) \geqslant F(\tilde{\gamma}(t), t_0, na)$. Естественно ожидать, что при длине периода a, стремящейся к нулю, оптимальная траектория с плановым периодом a будет стремиться к дифференциально оптимальной траектории. Так, в рамках геометрического примера нужно сделать лишь незначительные ограничения на целевую функцию F, чтобы это утверждение стало справедливым. Условия дифференциальной оптимальности часто оказываются значительно более простыми и естественными, чем условия оптимальности с плановым периодом конечной длины.

Вывод уравнения дифференциальной оптимизации

В предыдущем пункте мы рассмотрели математическую задачу нахождения дифференциально оптимальных траекторий развития систем (принцип дифференциальной оптимизации). Выведем теперь уравнение дифференциальной оптимизации для рассматриваемой экономической модели.

Траекториями в рассматриваемой экономической модели являются пары функций $\gamma(t)=\{m(t),\ \varphi(t)\}$, подчиненные уравнению (3) (для варианта модели, в котором функция $\varkappa(t)$ является экзогенной переменной), и тройки функций $\gamma(t)=\{m(t),\ \varphi(t),\ \varkappa(t)\}$, подчиненные уравнениям (3), (4) (для варианта модели, в котором функция $\varkappa(t)$ равна постоянной части национального дохода).

Такие траектории задают сбалансированное (по трудовым ресурсам и фондам) развитие экономики. Отрезком влияния для рассматриваемых траекторий развития экономической системы будет временной отрезок $[m(t),\ t]$ — фонды, созданные в этом периоде, участвуют в производстве в момент t. Функция $\varphi(t)$ предполагается разрывной кусочно-гладкой функцией, а функции $m(t)$ и $\varkappa(t)$ предполагаются непрерывными кусочно-гладкими функциями. На траекториях рассматривается функционал $P_\gamma(t)$, вычисляемый по формуле (1) (формула для исчисления в модели национального дохода в момент времени t).

Посмотрим, к какому уравнению приводит принцип дифференциальной оптимизации с функционалом $P_\gamma(t)$. Разберем сначала вариант модели, в котором функция $\varkappa(t)$ задана экзогенно. Вычислим правую производную $P_\gamma^{'+}(t)$ для траектории $\gamma(t)=\{m(t),\ \varphi(t)\}$ в произвольной точке t_0:

$$P_\gamma^{'+}(t_0)=U(\varkappa(t_0),\ \varphi(t_0),\ t_0]-U[\varkappa(m(t_0)),\ \varphi(m(t_0)),\ t_0]\,m'(t_0).$$

Если траектории совпадают до момента t_0, то для них величины $\varkappa(m(t_0))$, $\varphi(m(t_0))$ и $m(t_0)$ одинаковы. Для функций $\varkappa(t)$ и $\varphi(t)$ это вытекает из неравенства $m(t_0)<t_0$, а для функции $m(t)$ — из ее непрерывности. Баланс по трудовым ресурсам (уравнение (3)) связывает $\varphi^+(t_0)$ с $m'^+(t_0)$. Воспользовавшись этой связью, $P_\gamma^{'+}(t_0)$ можно считать функцией единственного аргумента m'^+

$$P_\gamma^{'+}(t_0)=U[\varkappa(t_0),\ T'(t_0)+\varphi(m(t_0))\,m'^+(t_0)]-$$
$$-U[\varkappa(m(t_0)),\ \varphi(m(t_0)),\ m(t_0)]\,m'(t_0). \qquad (1п)$$

Из равенства (1п) мы видим, что функция $P_\gamma^{'+}$ выпукла по m'^+. Поэтому максимум функции $P_\gamma^{'+}$ достигается в точке, в которой производная обращается в ноль. Отсюда получаем следующее уравнение:

$$\frac{d}{dm'^+}\quad P_\gamma^{'+}=\frac{\partial U[\varkappa(t),\ \varphi^+(t),\ t]}{\partial\varphi}\,\varphi(m(t))-U[\varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t)),\ m(t)]=0,$$

откуда

$$\frac{\partial U[\varkappa(t),\ \varphi^+(t),\ t]}{\partial\varphi}=\frac{U[\varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t)),\ m(t)]}{\varphi(m(t))}. \qquad (2п)$$

В дальнейшем мы будем интересоваться только непрерывными решениями. Для таких решений $\varphi^+(t)=\varphi(t)$ и знак перехода к правому пределу можно опустить. Для производственной функции типа Кобба—Дугласа

$$U[\varkappa(t), \varphi(t), t] = f(t)\varkappa^{\alpha}(t)\varphi^{\beta}(t), \quad \alpha+\beta=1$$

(здесь экзогенно заданная функция $f(t)$ моделирует технический прогресс, воплощенный в фондах периода t) уравнение дифференциальной оптимизации имеет следующий вид:

$$\beta f(t)\varkappa^{\alpha}(t)\varphi^{-\alpha}(t) = f(m(t))\varkappa^{\alpha}(m(t))\varphi^{-\alpha}(m(t)).$$

В варианте с эндогенно заданной функцией $\varkappa$ ($\varkappa(t)=\gamma P(t)$) принцип дифференциальной оптимизации приводит также к уравнению (5). Действительно, в рассматриваемом случае величина $P_{\gamma}^{\prime +}$ на траектории $\gamma(t)=\{\varkappa(t), \varphi(t), m(t)\}$ будет задаваться формулой

$$P_{\gamma}^{\prime +} = U[\varkappa^{+}(t), \varphi^{+}(t), t] - U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]\, m^{\prime +}(t).$$

Функция $\varkappa$ непрерывно зависит от времени, как это видно из уравнения (4). Следовательно, число $\varkappa^{+}(t_0)=\varkappa(t_0)$ одинаково для всех траекторий, совпадающих при $t<t_0$, и не может варьироваться. Мы приходим к той же экстремальной задаче и к прежнему уравнению дифференциальной оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л. В., Вайнштейн А. Л.* Об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития хозяйства. Экономика и математические методы. 1967, т. III, вып. 5.
2. *Solow R.* Investment and technical progress. In: Mathematical Methods in the Social Sciences, Standford, 1960.
3. *Johansen L.* Substitution versus Fixed Production Coefficents in the theory of Economic Growth. Econometrica, 1959, v. 27.
4. *Канторович Л. В., Горьков, Л. И.* Функциональные уравнения однопродуктовой модели. ДАН СССР, 1959, т. 129, № 4.
5. *Браун М.* Теория и измерение технического прогресса. М., Статистика, 1971.
6. *Канторович Л. В., Жиянов В. И.* Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса. ДАН СССР, 1973, т. 211, № 6.
7. *Жиянов В. И., Хованский А. Г.* Экспоненциальное развитие экономики в динамической модели с учетом научно-технического прогресса. Настоящий сборник, с. 25.

В. И. Жиянов, А. Г. Хованский

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАЗВИТИЕ ЭКОНОМИКИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С УЧЕТОМ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

В настоящей статье продолжается изучение однопродуктовой модели экономики с фондами, дифференцированными по моментам их создания [2]—[4]. Рассматриваются некоторые интересные с экономической точки зрения случаи, в которых система уравнений модели поддается явному решению. Один из таких случаев — вариант модели с экзогенно заданными капиталовложениями, в котором предполагается постоянство трудовых ресурсов. При этом предположении система